FLORENTIN SMARANDACHE

Convergence d’une famille de series

In Florentin Smarandache: “Généralisations et Généralités”. Fès (Maroc): Édition Nouvelle, 1984

CONVERGENCE D'UNE FAMILLE DE SERIES

Dans cet article, on construit une famille d'expressions $\mathcal{E}(n)$. Pour chaque élément $E(n)$ de $\mathcal{E}(n)$, la convergence de la séerie $\sum_{n=n_E} E(n)$ pourra être décidée d'après les théorèmes de l'article. L'article donne aussi des applications.

(1) Préliminaire .

Pour rendre l'expression plus aisée, nous utiliserons les fonctions récursives. Quelques notations et notions seront introduites pour simplifier et réduire la matière de cet article.

(2) Définitions ; lemmes.

Nous construisons récursivement une famille d'expressions $\mathcal{E}(n)$. Pour chaque expression $E(n) \in \mathcal{E}(n)$, le degré de l'expression est défini récursivement et noté $d°E(n)$, et son coefficient dominant est noté $c(E(n))$.

1. Si a est une constante réelle, alors $a \in \mathcal{E}(n)$.
   $d°a = 0$ et $c(a) = a$.
2. L'entier positif $n \in \mathcal{E}(n)$.
   $d°n = 1$ et $c(n) = 1$.
3. Si $E_1(n)$ et $E_2(n)$ appartiennent à $\mathcal{E}(n)$, avec $d°E_1(n) = r_1$ et $d°E_2(n) = r_2$, $c(E_1(n)) = a_1$ et $c(E_2(n)) = a_2$, alors :

a) $E_1(n)E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$; $d°(E_1(n)E_2(n)) = r_1+r_2$; $c(E_1(n)E_2(n))$ vaut a_1a_2.

b) si $E_2(n) \neq 0$ $\forall n \in N$ $(n \geqslant n_{E_2})$, alors $\frac{E_1(n)}{E_2(n)} \in \mathcal{E}(n)$ et $d°\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = r_1 - r_2$, $c\left(\frac{E_1(n^2)}{E_2(n)}\right) = \frac{a_1}{a_2}$.

c) Si :
α est un réel constant et si l'opération utilisée a un sens $(E_1(n))^\alpha$ (pr. tt. $n \in N$, $n \geqslant n_{E_1}$), alors $(E_1(n))^\alpha \in \mathcal{E}(n)$, $d°((E_1(n))^\alpha) = r_1\alpha$, $c((E_1(n))^\alpha) = a_1^\alpha$.

d) Si $r_1 \neq r_2$, alors $E_1(n) \pm E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$, $d°(E_1(n) \pm E_2(n))$ est le max de r_1 et r_2, et $c(E_1(n) \pm E_2(n)) = a_1$, respectivement a_2, suivant que le degré est r_1 ou r_2.

e) si $r_1 = r_2$ et $a_1+a_2 \neq 0$, alors $E_1(n)+E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$, $d°(E_1(n)+E_2(n)) = r_1$ et $c(E_1(n)+E_2(n)) = a_1+a_2$.

f) Si $r_1 = r_2$ et $a_1-a_2 \neq 0$, alors $E_1(n)-E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$, $d°(E_1(n)-E_2(n)) = r_1$ et $c(E_1(n)-E_2(n)) = a_1-a_2$.

4. Toute expression obtenue par application un nombre fini de fois du pas 3 appartient à $\mathcal{E}(n)$.

Note 1. De la définition de $\mathcal{E}(n)$ il résulte que, si $E(n) \in \mathcal{E}(n)$, alors $c(E(n)) \neq 0$ et que $c(E(n)) = 0$ si et seulement si $E(n) \equiv 0$.

Lemme 1. Si $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ et $c(E(n)) > 0$, alors il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n > n'$, $E(n) > 0$.

Preuve : soit $c(E(n)) = a_1 > 0$ et $d^\circ(E(n)) = r$.

Si $r > 0$, alors $\lim_{n \to \infty} E(n) = \lim_{n \to \infty} n^r \frac{E(n)}{n^r} =$

$= \lim_{n \to \infty} a_1 n^r = +\infty$, donc il existe $n' \in N$ tel que, qqst $n \geqslant n'$ on ait $E(n) > 0$.

Si $r < 0$, alors $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{E(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{-r}}{\frac{E(n)}{n^r}} = \frac{1}{a_1} \lim_{n \to \infty} n^{-r} = +\infty$

donc il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n \geqslant n'$, $\frac{1}{E(n)} > 0$,

ou encore $E(n) > 0$.

Si $r = 0$, alors ou bien $E(n)$ est une constante réelle positive,

ou bien $\frac{E_1(n)}{E_2(n)} = E(n)$, avec $d^\circ E_1(n) = d^\circ E_2(n) = r_1 \neq 0$, et

d'après ce que nous venons de voir, $c\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = \frac{c(E_1(n))}{c(E_2(n))} =$

$= c(E(n)) > 0$. Alors :

* ou bien $c(E_1(n)) > 0$ et $c(E_2(n)) > 0$: il en résulte

$$\left.\begin{array}{l} \text{il existe } n_{E1} \in N, \forall n \in N \text{ et } n \geqslant n_{E1},\ E_1(n) > 0 \\ \text{il existe } n_{E2} \in N, \forall n \in N \text{ et } n \geqslant n_{E2},\ E_2(n) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

il existe $n_E = \max(n_{E1}, n_{E2}) \in N, \forall n \in N, n \geqslant n_E, E(n) = \frac{E_1(n)}{E_2(n)} > 0$.

* ou bien $c(E_1(n)) < 0$ et $c(E_2(n)) < 0$ et alors :

$E(n) = \frac{E_1(n)}{E_2(n)} = \frac{-E_1(n)}{-E_2(n)}$, ce qui nous ramène au cas précédent.

Lemme 2. Si $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ et $c(E(n)) < 0$, alors il existe $n' \in N$, tel que qqst $n > n'$, $E(n) < 0$.

Preuve : l'expression $-E(n)$ a la propriété que $c(-E(n)) > 0$, d'après la définition récursive. D'après le lemme 1 : il existe $n' \in N, \forall n \in N, n \geqslant n'$, $-E(n) > 0$, c'est-à-dire $+E(n) < 0$, cqfd.

Note 2. Pour prouver le théorème suivant, nous supposons connu le critère de convergence des séries et certaines propriétés de ces derrnières.

(3) Théorème de convergence et applications.

Théorème : soit $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ avec $d^\circ E(n) = r$ et soit les séries $\sum_{n \geqslant n_E} E(n)$, $E(n) \not\equiv 0$. Alors :

A) si $r < -1$ la série est absolument convergente.
B) si $r \geq -1$ elle est divergente où $E(n)$ a un sens $\forall n \geq n_E$, $n \in N$.

Preuve : d'après les lemmes 1 et 2, et parce que :
la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ converge $\Longleftrightarrow$ la série $-\sum_{n \geq n_E} E(n)$ converge, nous pouvons considérer la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ comme une série à termes positifs. Nous allons prouver que la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ a la même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{-r}}$. Appliquons le second critère de comparaison :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E(n)}{\frac{1}{n^{-r}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{E(n)}{n^r} = c(E(n)) \neq \pm\infty.$$

D'après la note 1 si $E(n) \not\equiv 0$ alors $c(E(n)) \neq 0$ et donc la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ a la même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{-r}}$, c'est-à-dire :

A) si $r < -1$, alors la série est convergente ;
B) si $r > -1$, alors la série est divergente.

Pour $r < -1$, la série est absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

<u>Applications</u> : On peut en trouver beaucoup. En voici quelques-unes intéressantes :

Si $P_q(n)$, $R_s(n)$ sont des polynômes en n de degré q, s, et que $P_q(n)$ et $R_s(n)$ appartiennent à $\mathcal{E}(n)$:

1°) $\sum_{n \geq n_{PR}} \frac{\sqrt[k]{P_q(n)}}{\sqrt[h]{R_s(n)}}$ est $\begin{cases} \text{convergent, si } s/h - q/k > 1 \\ \text{divergent, si } s/h - q/k \leq 1. \end{cases}$

2°) $\sum_{n \geq n_R} \frac{1}{R_s(n)}$ est $\begin{cases} \text{convergent, si } s > 1 \\ \text{divergent, si } s \leq 1. \end{cases}$

<u>Exemple</u> : la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[2]{n+1} \cdot \sqrt[3]{n-7} + 2}{\sqrt[5]{n^2} - 17}$ est divergente parce que $\frac{2}{5} - (1/2+1/3) < 1$, et si on appelle $E(n)$ chaque quotient de cette série, $E(n)$ appartient à $\mathcal{E}(n)$ et a un sens pour $n \geq 2$.